

# Matemáticas I Series

Javier Pérez González

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO



August 17, 2014

Dada una sucesión  $\{a_n\}$ , podemos formar a partir de ella otra sucesión,  $\{A_n\}$ , cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de  $\{a_n\}$ , es decir:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \quad A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

o, si te gusta más,  $A_1 = a_1$  y, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$ .

Dada una sucesión  $\{a_n\}$ , podemos formar a partir de ella otra sucesión,  $\{A_n\}$ , cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de  $\{a_n\}$ , es decir:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \quad A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

o, si te gusta más,  $A_1 = a_1$  y, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$ .

La sucesión  $\{A_n\}$  así definida se llama *serie de término general*  $a_n$  o *serie definida por la sucesión*  $\{a_n\}$ , y la representaremos por  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o,

más sencillamente,  $\sum a_n$ . El número  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  se llama *suma parcial de orden*  $n$  de la serie  $\sum a_n$ .

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión.***

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión.***

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series.***

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión.***

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series.***

En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “acotada”, “convergente” o “positivamente divergente”.

Si una serie  $\sum a_n$  es convergente se usa el símbolo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k .$$

Si una serie  $\sum a_n$  es convergente se usa el símbolo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

La igualdad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  quiere decir que para todo  $\varepsilon > 0$ , hay un

$m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq m_\varepsilon$  se verifica que  $\left| \sum_{k=1}^n a_k - S \right| < \varepsilon$ .



# Serie geométrica

## Serie geométrica

Dado un número  $x$ , la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón  $x$ .

## Serie geométrica

Dado un número  $x$ , la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón  $x$ .

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ .

## Serie geométrica

Dado un número  $x$ , la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón  $x$ .

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ .

Es costumbre representar la serie geométrica de razón  $x$  con el símbolo  $\sum_{n \geq 0} x^n$ .

## Serie geométrica

Dado un número  $x$ , la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón  $x$ .

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ .

Es costumbre representar la serie geométrica de razón  $x$  con el símbolo  $\sum_{n \geq 0} x^n$ .

Dicha serie converge si, y sólo si,  $|x| < 1$ , en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

## Serie armónica

La serie de término general  $1/n$ , es decir, la sucesión  $\{H_n\}$  donde

$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , que simbólicamente representamos por  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , se llama

**serie armónica**. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} = +\infty.$$

## Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general  $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ; es decir, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

## Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general  $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ; es decir, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a  $\log 2$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$



**Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.**

## Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando **consecutivamente** los términos de la sucesión

$$\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \dots \right\}$$

## Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando **consecutivamente** los términos de la sucesión

$$\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \dots \right\}$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{ 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \dots \right\},$$

cuya serie asociada, obtenida sumando **consecutivamente** sus términos, es la sucesión  $\{S_n\}$  dada por:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$$

$$\dots\dots = \dots\dots$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$$

$$\dots\dots = \dots\dots$$

$$S_{3n} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} \right)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.
 \end{aligned}$$

Deducimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} \log 2$ . Es claro que

$\lim \{S_{3n} - S_{3n-1}\} = \lim \{S_{3n} - S_{3n-2}\} = 0$  de donde se sigue que:

$$\lim \{S_n\} = \frac{1}{2} \log 2.$$

## La particularidad del estudio de las series

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: **se trata de deducir propiedades de la serie**

$\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ , **a partir del comportamiento de  $\{a_n\}$** . Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión  $\{A_n\}$  haciendo hipótesis sobre la sucesión  $\{a_n\}$ . La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de  $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  no es posible “realizarla” en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión  $\{a_n\}$  es el dato que podemos utilizar*.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión  $\{a_n\}$  se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie  $\sum a_n$  a partir de uno en adelante.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión  $\{a_n\}$  se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie  $\sum a_n$  a partir de uno en adelante.

El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión  $\{a_n\}$  ello no afecta a la posible convergencia de la serie  $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$  pero sí afecta a la suma de dicha serie.



Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión  $\{a_n\}$  se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie  $\sum a_n$  a partir de uno en adelante.

El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión  $\{a_n\}$  ello no afecta a la posible convergencia de la serie  $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$  pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones y supongamos que hay un número  $q \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq q + 1$  es  $a_n = b_n$ . Entonces se verifica que las series  $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$  y  $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$  o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{j=1}^q a_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{j=1}^q b_j.$$

## Condición necesaria para la convergencia de una serie

## Condición necesaria para la convergencia de una serie

Para que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  sea convergente es necesario que  $\lim\{a_n\} = 0$ .

## Condición necesaria para la convergencia de una serie

Para que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  sea convergente es necesario que  $\lim\{a_n\} = 0$ .

Esta condición necesaria no es suficiente.

Una serie  $\sum a_n$  tal que  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se dice que es una *serie de términos positivos*.

Una serie  $\sum a_n$  tal que  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se dice que es una *serie de términos positivos*.

Una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente (cuando está mayorada) o es positivamente divergente.

### **Criterio básico de convergencia para series de términos positivos**

Una serie de términos positivos  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número  $M > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $\sum_{k=1}^n a_k \leq M$ . Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

## Criterio básico de comparación

Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \leq b_n$  para todo  $n > k$ . Entonces se verifica que si la serie  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente, también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente o, equivalentemente, si la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente también  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente.

## Criterio límite de comparación

Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L = +\infty$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.



## Criterio límite de comparación

Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L = +\infty$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.
- Si  $L = 0$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

## Criterio límite de comparación

Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L = +\infty$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.
- Si  $L = 0$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $L \in \mathbb{R}^+$  las series  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  son ambas convergentes o ambas divergentes.

## Criterio límite de comparación

Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L = +\infty$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.
- Si  $L = 0$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $L \in \mathbb{R}^+$  las series  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  son ambas convergentes o ambas divergentes.

## Criterio límite de comparación

Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L = +\infty$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.
- Si  $L = 0$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente también  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $L \in \mathbb{R}^+$  las series  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  son ambas convergentes o ambas divergentes.

En particular, **si dos sucesiones de números positivos,  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son asintóticamente equivalentes, las respectivas series,  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  ambas convergen o ambas divergen.**

## Criterio integral

Sea  $f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función **positiva y decreciente**. Entonces se verifica que

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

En consecuencia, la serie  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  y la integral  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  ambas convergen o ambas divergen.

## Series de Riemann

Dado un número real  $\alpha$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  se llama serie de Riemann de exponente  $\alpha$ . Dicha serie es convergente si, y sólo si,  $\alpha > 1$ .

## Series de Riemann

Dado un número real  $\alpha$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  se llama serie de Riemann de exponente  $\alpha$ . Dicha serie es convergente si, y sólo si,  $\alpha > 1$ .

## Series de Bertrand

La serie  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$  converge si  $\alpha > 1$  cualquiera sea  $\beta$ , y también si  $\alpha = 1$  y  $\beta > 1$ . En cualquier otro caso es divergente.

## Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.



## Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$  o si hay un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq k$  es  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , entonces  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente y además  $\{a_n\}$  no converge a 0.

## Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$  o si hay un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq k$  es  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , entonces  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente y además  $\{a_n\}$  no converge a 0.
- Si  $L = 1$  el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

## Ejercicio.

Estudia la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$  donde  $x \in \mathbb{R}$ .

## Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \{ \sqrt[n]{a_n} \} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.

## Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \{ \sqrt[n]{a_n} \} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.
- Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente y  $\{a_n\}$  no converge a 0.

## Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \{ \sqrt[n]{a_n} \} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- Si  $L < 1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.
- Si  $L > 1$  o si  $L = +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente y  $\{a_n\}$  no converge a 0.
- Si  $L = 1$  el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

## Ejercicio

Estudia la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{2n^3 - 2n}$ .

## Criterio de Raabe (1832)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

- Si  $L > 1$  o  $L = +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.



## Criterio de Raabe (1832)

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

- Si  $L > 1$  o  $L = +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $L < 1$  o  $L = -\infty$ , entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

## Forma alternativa del criterio de Raabe

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos tal que  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . Sea

$$S_n = \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n.$$

- Si  $S_n \rightarrow e^L$  con  $L > 1$  o si  $S_n \rightarrow +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

## Forma alternativa del criterio de Raabe

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos tal que  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . Sea

$$S_n = \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n.$$

- Si  $S_n \rightarrow e^L$  con  $L > 1$  o si  $S_n \rightarrow +\infty$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
- Si  $S_n \rightarrow e^L$  con  $L < 1$  o si  $S_n \rightarrow 0$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente.

Se dice que una serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es **conmutativamente convergente** si para toda biyección  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , se verifica que la serie definida por la sucesión  $\{a_{\pi(n)}\}$ , es decir la serie

$$\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es **conmutativamente convergente** si para toda biyección  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , se verifica que la serie definida por la sucesión  $\{a_{\pi(n)}\}$ , es decir la serie

$$\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es **absolutamente convergente** si la serie  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  es convergente.

**Toda serie absolutamente convergente es convergente.**

**Toda serie absolutamente convergente es convergente.**

**Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente.**

**Toda serie absolutamente convergente es convergente.**

**Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente.**

Además, si la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es absolutamente convergente, entonces para toda biyección  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$



**Teorema de Riemann: Si una serie no es absolutamente convergente entonces no es conmutativamente convergente.**

**Teorema de Riemann: Si una serie no es absolutamente convergente entonces no es conmutativamente convergente.**

Con más precisión:

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Entonces existe una biyección  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)}$  es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

**Teorema de Riemann: Si una serie no es absolutamente convergente entonces no es conmutativamente convergente.**

Con más precisión:

Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Entonces existe una biyección  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)}$  es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

**Convergencia absoluta  $\iff$  Convergencia conmutativa**

## Criterio de Leibniz para series alternadas

Supongamos que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n$  es convergente.

Además, si  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$  y  $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ .

## Ejercicio

Estudia, según los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergencia de la serie:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)^\alpha$$

## Series de potencias

Dadas una sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  y un número  $a \in \mathbb{R}$ , se llama **serie de potencias** centrada en  $a$  a la sucesión

$$\{c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n\}$$

en la cual  $x$  representa a un número real arbitrario. Dicha serie se simboliza por

$$\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n.$$

## Series de potencias

Dadas una sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  y un número  $a \in \mathbb{R}$ , se llama **serie de potencias** centrada en  $a$  a la sucesión

$$\{c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n\}$$

en la cual  $x$  representa a un número real arbitrario. Dicha serie se simboliza por

$$\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n.$$

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función  $f$  que tiene derivadas de todo orden en un punto  $a$ , la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

se llama serie de Taylor de  $f$  en  $a$ .

Dada una serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n$ , sea  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  y definamos:

$$R = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda = +\infty; \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{si } 0 < \lambda < +\infty; \\ +\infty, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$



Dada una serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n$ , sea  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  y definamos:

$$R = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda = +\infty; \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{si } 0 < \lambda < +\infty; \\ +\infty, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Entonces, si  $R = 0$  la serie converge sólo para  $x = a$ ; si  $0 < R < +\infty$  la serie converge absolutamente para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x - a| < R$  y no converge para  $|x - a| > R$ ; y si  $R = +\infty$  la serie converge absolutamente para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Con las notaciones del teorema anterior, el número  $R$  se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Una serie de potencias se dice que es trivial si  $R = 0$ .

Con las notaciones del teorema anterior, el número  $R$  se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Una serie de potencias se dice que es trivial si  $R = 0$ .

Para una serie de potencias no trivial, centrada en un punto  $a$ , el intervalo  $I = ]a - R, a + R[$ , si  $0 < R < +\infty$ , o bien la totalidad de  $\mathbb{R}$ ,  $I = \mathbb{R}$ , cuando  $R = +\infty$ , se llama **intervalo de convergencia** de la serie; y la función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$  para todo  $x \in I$ , se llama **función suma** de la serie.

Dada una serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n$ , supongamos que  $c_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y que

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces el radio de convergencia  $R$  viene dado por  $R = 1/\lambda$ , cuando  $0 < \lambda < +\infty$ ,  $R = 0$  si  $\lambda = +\infty$  y  $R = +\infty$  si  $\lambda = 0$ .

## Derivación de una serie de potencias

Sea  $\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia no nulo

*R.* Sea  $I$  el intervalo de convergencia de la serie y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma de la serie definida para todo  $x \in I$  por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- $f$  es indefinidamente derivable en  $I$ .

## Derivación de una serie de potencias

Sea  $\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia no nulo

*R.* Sea  $I$  el intervalo de convergencia de la serie y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma de la serie definida para todo  $x \in I$  por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- $f$  es indefinidamente derivable en  $I$ .
- La derivada de orden  $k$  de  $f$  está dada para todo  $x \in I$  por:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n(x - a)^{n-k}.$$

## Derivación de una serie de potencias

Sea  $\sum_{n \geq 0} c_n(x - a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia no nulo

*R.* Sea  $I$  el intervalo de convergencia de la serie y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma de la serie definida para todo  $x \in I$  por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- $f$  es indefinidamente derivable en  $I$ .
- La derivada de orden  $k$  de  $f$  está dada para todo  $x \in I$  por:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n(x - a)^{n-k}.$$

## Derivación de una serie de potencias

Sea  $\sum_{n \geq 0} c_n(x-a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia no nulo

$R$ . Sea  $I$  el intervalo de convergencia de la serie y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma de la serie definida para todo  $x \in I$  por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- $f$  es indefinidamente derivable en  $I$ .
- La derivada de orden  $k$  de  $f$  está dada para todo  $x \in I$  por:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n(x-a)^{n-k}.$$

En particular, se verifica que  $f^{(k)}(a) = c_k \cdot k!$ , es decir,  $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$  y, por tanto, la serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} c_n(x-a)^n$  coincide con la serie de Taylor en  $a$  de su función suma.



Dada una función  $f$  con derivadas de todos órdenes en un intervalo  $I$  y un punto  $a \in I$ , ¿se verifica que la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $a$  tiene radio de convergencia no nulo? En caso de que así sea, ¿se verifica que la función suma de la serie de Taylor de  $f$  coincide con  $f$ ?

## Series de Taylor de la función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

La serie de Taylor centrada en un punto  $a$  se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que:

$$e^x = e^a e^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

## Series de Taylor del seno y del coseno

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(a + k \frac{\pi}{2}\right)}{k!} (x-a)^k \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Por el teorema de derivación para series de potencias obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(a + (k+1) \frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \left(a + k \frac{\pi}{2}\right)}{k!} (x-a)^k \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Si hacemos  $a = 0$  tenemos que para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

## Series de Taylor de la función logaritmo

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

La serie de Taylor del logaritmo centrada en  $a > 0$  se deduce de lo anterior:

$$\log(x) = \log(a + (x-a)) = \log a + \log\left(\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x-a)^{n+1}$$

## Serie de Taylor del arcotangente en cero

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in ]-1, 1[)$$